Compito 2

1. Dimostra che la funzione caratteristica dei quadrati perfetti $0, 1, 4, 9, 16, ...$, è primitiva ricorsiva.

2. Siano G un sottogruppo transitivo di $\mathrm{Sym}(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ e $H \leq \mathrm{Sym}(\Omega)$ tale che $G_\omega \leq H$. Posto $\Delta = \{h(\omega) \mid h \in H\}$, si dimostrino i seguenti fatti:

   (a) se $\Delta \cap g(\Delta) \neq \emptyset$ per qualche $g \in G$, allora $g \in H$ e $\Delta = g(\Delta)$;

   (b) se $x(\Delta) \cap y(\Delta) \neq \emptyset$ per qualche $x, y \in G$, allora $x(\Delta) = y(\Delta)$;

   (c) il gruppo G agisce transitivamente sull'insieme $\Gamma = \{g(\Delta) \mid g \in G\}$;

   (d) nel caso in cui $G = \mathrm{Sym}(\Omega)$, si dimostri che non esistono sottogruppi propri di G che contengono propriamente G_ω.

3. Siano $\mathbb{K} \mid \mathbb{F}$ un'estensione di Galois e $G = \mathcal{G}al(\mathbb{K} \mid \mathbb{F})$. Supponiamo che esista un morfismo non banale $\sigma : G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dimostrare che G possiede un sottogruppo normale di indice primo. Provare quindi che esiste un sottocampo intermedio $\mathbb{E}$ tale che $|\mathbb{E} : \mathbb{F}|$ è un primo e l'estensione $\mathbb{E} \mid \mathbb{F}$ è di Galois.

4. Sia data in $\mathbb{R}^3$ la superficie sferica definita da $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$ l'asse delle x. Si consideri lo spazio topologico $X = S^2 \cup A$ dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

   a) Si calcoli il gruppo fondamentale $\Pi_1(X)$ dello spazio X e se ne esibisca un insieme di generatori.

   Sia ora $Y = S^2 \setminus \{A \cup \{(0, 0, 1)\}\}$, sempre dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

   b) Si calcoli il gruppo fondamentale $\Pi_1(Y)$ dello spazio Y e se ne esibisca un insieme di generatori.

5. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Sia $T : V \to V$ un'applicazione lineare. Per $j \in \mathbb{N}$, si denoti con T^j la composizione di T con se stesso per j volte.

   a) Si provi che $Im(T^{j+1}) \subseteq Im(T^j)$.

   b) Si provi che se $Im(T^{j+1}) = Im(T^j)$ allora $Im(T^i) = Im(T^j)$ per ogni $i \geq j$.

   c) Si provi che se esiste j tale che $Im(T^{j+1}) = Im(T^j) = W$, allora $T_{|W} : W \to W$ è un isomorfismo.

6. Sia f una funzione intera, ossia una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Si dimostri che se f ha una delle seguenti proprietà allora è necessariamente costante:

   a) Esiste una costante $M > 0$ tale che $\mathbf{Re} f(z) < M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$.

b) Per qualche $\epsilon > 0$ e qualche $t \in \mathbb{R}$ si ha $\mathbf{Re}f(z) + \mathbf{Im}f(z) = t$ per ogni z tale che $|z| < \epsilon$.

c) Per qualche $w \in \mathbb{C}$ si ha $f(\frac{1}{n}) = w$ per ogni intero $n \geq 1$.

d) Esiste una costante $K > 0$ tale che $|f(z)| < K|z|^{\frac{1}{2}}$ per ogni z tale che $|z| > 1$.

7. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \cos\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che il problema ammette una sola soluzione $y(x)$ e che questa è definita su $(-\infty, \infty)$.

(ii) Dimostrare che esiste $c > 0$ tale che $y(x) \leq c(1+x^2)$ per ogni $x \in (-\infty, \infty)$.

8. Sia f la funzione definita da $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+5}$.

(i) Determinare l'insieme di definizione di f.

(ii) Calcolare l'espressione analitica di $f(x)$ nel suo insieme di definizione.

9. Se le X_i, $i = 1, \dots, n$ sono variabili aleatorie i.i.d. tali che $E(X_i^4) < +\infty$ e $\sigma^2 = Var(X_i)$ calcolare

(1) $E((\sum_{i=1}^{n} X_i)^4)$

(2) $\lim_{n \to +\infty} E((\sum_{i=1}^{n} X_i/(\sigma\sqrt{n}))^4)$

10. Sia X una variabile aleatoria avente densitá $f(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}$ con $t \in [0, a]$, $a > 0$ un parametro e $c > 0$ una costante opportuna.

Determinare c e fornire degli stimatori puntuali di a, ad esempio mediante il metodo dei momenti e della massima verosimiglianza.

11. Un' asta rigida AB di lunghezza l si muove in un piano con l'estremo A che percorre con velocità uniforme la circonferenza di centro C e raggio r in modo tale che il versore di $B - A$ forma un angolo ϕ ($|\phi| < \pi/2$) costante con il versore di $A - C$.

(i) Quale è il vettore velocità angolare dell'asta? Quale è la traiettoria dell'estremo B? Quale è la superficie spazzata dall'asta quando A ha percorso un giro completo? Come varia il centro istantaneo del moto rigido dell'asta?

(ii) Supposto che il piano sia verticale e che la circonferenza sia un vincolo liscio e fisso per il corpo pesante omogeneo AB vincolato a muoversi mantenendo costante la direzione gia' sopra citata, si scriva la equazione del moto o un suo integrale.

12. La funzione $u(x,t) = 2x$ verifica l' equazione delle onde $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$ per $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$? Quante e quali condizioni per $t = 0$ la determinano?

    (i) Dare risposte motivate alle domande.

    (ii) Dedurre la formula di D'Alembert.

13. Determinare i coefficienti della parabola

$$q(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2,$$

che approssima, nel senso dei minimi quadrati, le seguenti coppie di dati (z_j, f_j), $j = 0, \ldots, 3$:

$$(1, \alpha), \quad (-1, \beta), \quad (i, \gamma), \quad (-i, \delta),$$

dove i è l'unità immaginaria e $\alpha, \ldots, \delta$ sono costanti assegnate.

14. Spiegare quale, tra i seguenti metodi numerici per equazioni differenziali,

    - metodo di Eulero esplicito,
    - metodo di Eulero implicito,
    - metodo dei trapezi,

è il più adatto per approssimare la soluzione del problema

$$\begin{array}{rclrcll} y'(t) & = & x(t), & x'(t) & = & -y(t), & t \in [0,T], \\ y(0) & = & x(0) & = & 1, & & \end{array}$$

quando $T \gg 0$.